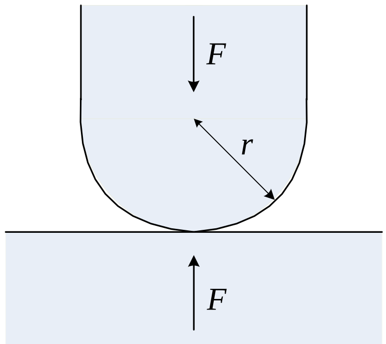
1. Kontaktni otpor

1. Tačkasti kontakt se ostvaruje pritiskom bakarne polusfere na ravnu bakarnu ploču. Sila koja dejstvuje na polusferu je F=98 N. Poluprečnik polusfere je r=10 mm. Odrediti provlačni otpor kontakata. Dati su sledeći podaci:

- koeficijent elastičnosti za bakar $E = 11{,}8 \cdot 10^{10}$ N/m^2
- Puasonov koeficijent za bakar $\mu = 0{,}35$
- specifična otpornost za bakar $\rho = 1{,}62 \cdot 10^{-8}$ Ωm
- naprezanje na pritisak za tvrdi bakar $\sigma_p = 5{,}1 \cdot 10^{8}$ N/m^2 (granično naprezanje do koga je deformacija elastična).



Slika 1.1: *Tačkasti kontakt ostvaren pritiskom polusfere na ravnu ploču*

Rešenje:

Provlačna komponenta otpora tačkastog kontakta (provlačni otpor) se izračunava na osnovu:

$$R_p = \frac{\rho}{\pi \cdot a}$$

gde je a poluprečnik pretpostavljene sfere preko koje se ostvaruje dodir kontakata.

Ako se na mestu dodira umesto sfere pretpostavi ravna kružna ploča (valjak) istog poluprečnika, dobija se prema Holmovom obrascu nešto veća vrednost provlačnog otpora:

$$R_p = \frac{\rho}{2 \cdot a}.$$

Poluprečnik sfere (ili valjka) preko koje ostvaruje dodir se određuje iz opšteg obrasca koji se odnosi na oblast plastičnih deformacija:

$$a = \sqrt[3]{\frac{3}{4} F \frac{1-\mu^2}{E} 2 \frac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2}},$$

gde su r_1 i r_2 poluprečnici krivina tela koja grade kontakt. U ovom slučaju je jedna dodirna površina u obliku polusfere a druga u obliku ploče, odnosno $r_1 = r$ i $r_2 \to \infty$, tako da je:

$$\lim_{r_2 \to \infty} \frac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2} = r_1 = r$$

Poluprečnik sfere (ili valjka) preko koje ostvaruje dodir se

$$a = \sqrt[3]{\frac{3}{2} F \frac{1-\mu^2}{E} r} = 2,22 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Naprezanje na kontaktnoj površini je:

$$\sigma = \frac{F}{\pi \cdot a^2} = 6,33 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$$

Pošto je σ=6,33·10^8 N/m^2 > σ_p došlo je do plastične deformcije. U oblasti plastičnih deformacija važi: $\sigma \approx \sigma_p = const$, tako da je poluprečnik sfere preko koje ostvaruje dodir:

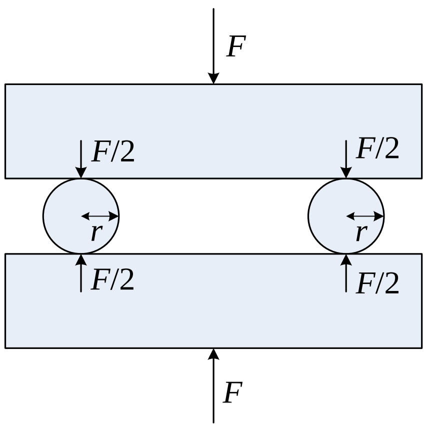
$$a^{'} = \sqrt{\frac{F}{\pi \cdot \sigma_p}} = 2,47 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Provlačni otpor kontakta je:

$$R_p = \frac{\rho}{2 \cdot a^{'}} = 3{,}28 \cdot 10^{-5} \Omega$$

2. Između dve pravougaone bakarne šine nalaze se dve bakarne kugle poluprečnika r=10 mm. Šine su stegnute silom F=196 N. Odrediti provlačni otpor između šina. Dati su sledeći podaci:

- koeficijent elastičnosti za bakar $E = 11{,}8 \cdot 10^{10}$ N/m^2
- Puasonov koeficijent za bakar $\mu = 0{,}35$
- specifična otpornost za bakar $\rho = 1{,}62 \cdot 10^{-8}$ Ωm
- naprezanje na pritisak za meki bakar $\sigma_p = 3{,}83 \cdot 10^8$ N/m^2



Slika 2.1: *Tačkasti kontakti ostvareni pritiskom ravnih ploča na dve kugle*

Rešenje:

Poluprečnik sfere preko koje ostvaruje dodir za oblast plastičnih deformacija u opštem slučaju je:

$$a = \sqrt[3]{\frac{3}{4} F \frac{1-\mu^2}{E} 2 \frac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2}} ,$$

gde su r_1 i r_2 poluprečnici krivina tela koja grade kontakt a F sila koja deluje na kontakte . Pošto je u ovom slučaju jedna dodirna površina u obliku polusfere (r_1=r) a druga u obliku ploče

($r_2 \to \infty$) i pošto se kontakt ostvaruje preko dve kugle, poluprečnik sfere preko koje se ostvaruje dodir je:

$$a = \sqrt[3]{\frac{3}{4} \cdot \frac{F}{2} \cdot \frac{1-\mu^2}{E} \cdot 2 \cdot \lim_{r_2 \to \infty} \frac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{4} F \frac{1-\mu^2}{E} r} = 2,23 \cdot 10^{-4} \text{ m},$$

Naprezanje na kontaktnoj površini je:

$$\sigma = \frac{F}{2} \cdot \frac{1}{\pi \cdot a^2} = 6,33 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$$

Pošto je σ=6,33·10^8 N/m^2 > σ_p došlo je do plastične deformcije. U oblasti plastičnih deformacija važi: $\sigma \approx \sigma_p = const$, tako da je poluprečnik sfere preko koje ostvaruje dodir:

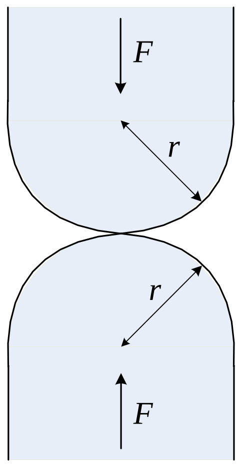
$$a' = \sqrt{\frac{F}{2} \cdot \frac{1}{\pi \cdot \sigma_p}} = 2,85 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Provlačni otpor kontakta je:

$$R_p = \frac{\rho}{2 \cdot a'} = 2,84 \cdot 10^{-5} \Omega$$

3. Tačkasti kontakt ostvaren je pomoću dva cilindrična bakarna provodnika koji su na svojim krajevima zaobljeni pod poluprečnikom r=40 mm. Odrediti provlačni otpor kontakata na sobnoj temperaturi, ako na kontakte deluje sila F=98 N. Dati su sledeći podaci:

- koeficijent elastičnosti za bakar $E = 11,8 \cdot 10^{10}$ N/m^2
- Puasonov koeficijent za bakar $\mu = 0,35$
- specifična otpornost za bakar $\rho = 1,62 \cdot 10^{-8}$ Ωm
- naprezanje na pritisak za meki bakar $\sigma_p = 3,83 \cdot 10^8$ N/m^2



Slika 3.1: *Tačkast kontakt ostvareni pomoću dva cilindrična provodnika koji su zaobljeni na krajevima*

Rešenje:

Provlačni otpor se može izračunati na osnovu Holmovog obrasca:

$$R_p = \frac{\rho}{2a}.$$

gde je a poluprečnik sfere (valjka) preko koje se ostvaruje dodir. Poluprečnik a se određuje iz opšteg obrasca koji se odnosi na oblast plastičnih deformacija:

$$a = \sqrt[3]{\frac{3}{4} F \frac{1-\mu^2}{E} 2 \frac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2}},$$

gde su r_1 i r_2 poluprečnici krivina tela koja grade kontakt i za njih važi $r_1=r_2=r$. Poluprečnik sfere (valjka) je:

$$a = \sqrt[3]{\frac{3}{4} F \frac{1-\mu^2}{E} r} = 2,796 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}$$

Naprezanje na kontaktnu površinu je:

$$\sigma = \frac{F}{\pi \cdot a^2} = 3,99 \cdot 10^8\ \mathrm{N/m^2}$$

Pošto je σ=3,99·10^8 N/m^2 > σ_p došlo je do plastične deformcije. U oblasti plastičnih deformacija važi: $\sigma \approx \sigma_p = const$, tako da je poluprečnik sfere preko koje se ostvaruje dodir:

$$a' = \sqrt{\frac{F}{\pi \sigma_p}} = 2,85 \cdot 10^{-4} m$$

Provlačni otpor kontakta je:

$$R_p = \frac{\rho}{2a'} = 2,84 \cdot 10^{-5} \Omega$$

4. Tačkasti kontakt ostvaren je pomoću dva cilindrična bakarna provodnika koji su na svojim krajevima zaobljeni pod poluprečnikom R=40 mm. Odrediti provlačni otpor kontakata na sobnoj temperaturi, ako na kontakte deluje sila F=98 N. Specifična otpornost bakra iznosi ρ=1,62·10^{-8} Ωm. Tvrdoća mekog bakra iznosi H=4·10^8 N/m^2.

Rešenje:

Naprezanje u zadatku 3 je iznosilo:

$$\sigma = \frac{F}{\pi a^2} = 3,99 \cdot 10^8\ \mathrm{N/m^2}$$

U opsegu relativne deformacije 0,02-0,04 tvrdoća materijala je konstantna i iznosi H=4·10^8 N/m^2. Ako se tvrdoća materijala definiše kao naprezanje na površini materijala kada čelična kuglica pod silom F prodire u materijal i ostavlja otisak poluprečnika a'

$$H = \frac{F}{\pi a'^2}$$

poluprečnik sfere na mestu dodira je:

$$a' = \sqrt{\frac{F}{\pi H}}$$

Provlačni otpor se izračunava prema Holmovom obrascu:

$$R_p = \frac{\rho}{2} \cdot \sqrt{\frac{\pi H}{F}} = 2{,}90 \cdot 10^{-5}\,\Omega$$

Upoređivanjem sa zadatkom 3 vidi se da je odstupanje dobijene vrednosti u odnosu na tačnu vrednost za provlačni otpor zanemarljivo.

5. Tačkasti kontakt ostvaren je pomoću dva cilindrična bakarna provodnika koji su na svojim krajevima zaobljeni pod poluprečnikom r=10 mm. Odrediti slojni otpor i ukupni otpor kontakta na sobnoj temperaturi θ_0=20 °C i u zagrejanom stanju, pri čemu je temperatura najtoplije tačke kontakta θ_m=90 °C. Koeficijent temperaturne promene otpora iznosi α=0,00392. Na kontakte deluje sila F=98 N. Specifična otpornost bakra iznosi ρ=1,62·10^{-8} Ωm. Dati su sledeći podaci:

- koeficijent elastičnosti za bakar $E = 11{,}8 \cdot 10^{10}$ N/m^2
- Puasonov koeficijent za bakar $\mu = 0{,}35$
- specifična otpornost za bakar $\rho = 1{,}62 \cdot 10^{-8}\,\Omega\text{m}$
- naprezanje na pritisak za meki bakar $\sigma_p = 3{,}83 \cdot 10^8$ N/m^2

Rešenje:

U zadatku 3 je određen poluprečnik tačke dodira:

$$a' = \sqrt{\frac{F}{\pi \sigma_p}} = 2{,}85 \cdot 10^{-4}\text{ m}$$

Slojni otpor se određuje iz relacije:

$$R_s = \frac{\sigma_s}{\pi \cdot a'^2}$$

Konstanta σ_s je za sve metale reda veličine $10^{-12}\,\Omega\text{m}^2$. Slojni otpor je:

$$R_S = \frac{\sigma_s}{\pi a'^2} = 3{,}9 \cdot 10^{-6}\,\Omega$$

Za sobnu temperature provlačni otpor je određen u zadatku 2:

$$R_p = \frac{\rho}{2a'} = 2{,}84 \cdot 10^{-5}\,\Omega$$

Upoređivanjem slojnog i provlačnog otpora vidi se da je provlačni otpor za red veličine veći od slojnog otpora. Ukupan otpor kontakata na sobnoj temperaturi 20 °C je:

$$R_k^{20\,^\circ\mathrm{C}} = R_p + R_s = 2{,}84 \cdot 10^{-5} + 3{,}9 \cdot 10^{-6} = 3{,}23 \cdot 10^{-5}\,\Omega$$

Pri zagrevanju kontakata slojni otpor se ne menja (jer u principu ne zavisi od temperature), a menja se provlačni otpor jer se sa povećanjem temperature povećava sprecifična otpornost ρ. Zbog nejednake gustine struje u provlačnom području najveća temperatura kontakta θ_m će biti u dodirnoj tački dok će ostali deo kontakta imati nižu temperaturu. Zbog toga specifičnu otpornost kontakta treba računati sa nekom srednjom temperaturom kontakta θ_{sr}, prema relaciji:

$$\rho = \rho_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta\theta_{sr}) = \rho_0 \cdot \left(1 + \alpha \cdot \frac{2}{3} \cdot \Delta\theta_m\right),$$

gde su:

$\Delta\theta_{sr} = (2/3)\cdot\Delta\theta_m$ - srednja nadtemperatura (priraštaj temperature) kontakta,

$\Delta\theta_m = \theta_m - \theta_0 = 90 - 20 = 70\ ^{o}\mathrm{C}$ - nadtemperatura najtoplije tačke kontakta.

Provlačni otpor na temperaturi θ_m=90 ^{o}C je:

$$R_P^{90\,^{o}\mathrm{C}} = \frac{\rho}{2a^{'}} = \frac{\rho_0}{2a^{'}}\left(1+\alpha\cdot\frac{2}{3}\cdot\Delta\theta_m\right) = R_P^{20\,^{o}\mathrm{C}}\cdot\left(1+\alpha\cdot\frac{2}{3}\cdot\Delta\theta_m\right) = 3{,}36\cdot10^{-5}\,\Omega$$

Ukupni otpor kontakata na temperaturi θ_m=90 ^{o}C je:

$$R_k^{90\,^{o}\mathrm{C}} = R_p^{90\,^{o}\mathrm{C}} + R_s = 3{,}36\cdot10^{-5} + 3{,}9\cdot10^{-6} = 3{,}75\cdot10^{-5}\ \Omega$$

6. Odrediti kontaktni otpor za kontakt iz prethodnog zadatka za slučaj sobne temperature s tim što je jedan od kontakata od gvožđa, a drugi od bakra. Dati su sledeći podaci:

- specifična otpornost i tvrdoća bakra: $\rho_{Cu} = 1{,}62\cdot10^{-8}\ \Omega\mathrm{m}$ i $H_{Cu} = 4\cdot10^{8}\ \mathrm{N/m^2}$
- specifična otpornost i tvrdoća gvožđa: $\rho_{Fe} = 7\cdot10^{-8}\ \Omega\mathrm{m}$ i $H_{Fe} = 12\cdot10^{8}\ \mathrm{N/m^2}$

Rešenje:

U slučaju da su kontakti od različitog materijala, uzima se ekvivalentna specifična otpornost:

$$\rho_e = \frac{\rho_{Cu} + \rho_{Fe}}{2} = 4{,}31\cdot10^{-8}\ \Omega\mathrm{m}$$

Kako je $H_{Fe} > H_{Cu}$ dominantna je tvrdoća bakra jer se za proračun uzima tvrdoća mekšeg materijala, što znači da se poluprečnik *a'* menja.

$$H = H_{Cu} = 4\cdot10^{8}\ \mathrm{N/m^2}$$

U zadatku dva izračunat je provlačni otpor:

$$R_p = \frac{\rho_{Cu}}{2a'} = 2{,}84\cdot10^{-5}\ \Omega$$

Provlačni otpor je:

$$R_p' = R_p\,\frac{\rho_e}{\rho_{Cu}'} = 7{,}56\cdot10^{-5}\ \Omega$$

Slojni otpor se ne menja jer ima istu vrednost za sve metale:

$$R_s = \frac{\sigma_s}{\pi a'^2} = 3{,}9\cdot10^{-6}\ \Omega$$

Ukupan otpor kontakta iznosi:

$$R_k' = R_p' + R_s = 7{,}56\cdot10^{-5} + 3{,}9\cdot10^{-6} = 7{,}95\cdot10^{-5}\ \Omega = R_p' + R_s = \frac{\rho_e}{2}\sqrt{\frac{\pi H_{Cu}}{F}} + \sigma_s\frac{H_{Cu}}{F}$$

7. Tačkasti kontakt je ostvaren pomoću dva cilindrična bakarna provodnika koji su na svom kraju zaobljeni pod poluprečnikom r=40 mm. Na provodnike deluje sila F=150 N. Specifični slojni otpor iznosi σ=10^{-12} Ωm^2. Koeficijent temperaturne promene otpornosti za bakar iznosi

α=4.2·10^{-3} 1/ °C. Specifične otpornosti i tvrdoće materijala pri temperaturi od 20 °C su date u tabeli 1.

a) Odrediti provlačni i ukupni otpor na sobnoj temperaturi 20 °C i u zagrejanom stanju, pri čemu je temperatura najtoplije tačke kontakta 85 °C.

b) Odrediti provlačni i ukupni otpor na sobnoj temperaturi u slučaju da je jedan provodnik od srebra.

Tabela 1. Specifične otpornosti i tvrdoće materijala pri temperaturi od 20 °C

	srebro	bakar	gvožđe	volfram
ρ (10^{-8} Ωm)	1.65	1.75	7	5.5
H (10^{8} N/m^{2})	6.5	7.5	12	20

Rešenje:

a) Provlačni otpor na temperaturi θ_0=20 °C je:

$$R_p^{20\,^\circ\mathrm{C}} = \frac{\rho}{2} \cdot \sqrt{\frac{\pi H}{F}} = 3.47 \cdot 10^{-5} \Omega$$

Slojni otpor je:

$$R_s = \sigma_s \frac{H}{F} = 5 \cdot 10^{-6} \Omega$$

Ukupni otpor na temperaturi θ_0=20 °C je:

$$R_k^{20\,^\circ\mathrm{C}} = R_p^{20\,^\circ\mathrm{C}} + R_s = 3,47 \cdot 10^{-5} + 5 \cdot 10^{-6} = 3,97 \cdot 10^{-5}\ \Omega$$

Provlačni otpor na temperaturi θ_m=85 °C je:

$$R_P^{90\,^\circ\mathrm{C}} = R_P^{20\,^\circ\mathrm{C}} \cdot \left(1 + \alpha \cdot \frac{2}{3} \cdot \Delta\theta_m\right) = 4,10 \cdot 10^{-5} \Omega$$

Ukupni otpor na temperaturi θ_m=85 °C je:

$$R_k^{85\,^\circ\mathrm{C}} = R_p^{85\,^\circ\mathrm{C}} + R_s = 4,60 \cdot 10^{-5}\ \Omega$$

b) Ekvivalentna specifična otpornost je:

$$\rho_e = \frac{\rho_{Cu} + \rho_{Fe}}{2} = 1,7 \cdot 10^{-8}\ \Omega\mathrm{m}$$

Kako je H_{cu}>H_{Ag}, za proračun uzima tvrdoća srebra kao mekšeg materijala:

$$H_{Ag} = 6.5 \cdot 10^{8}\ \mathrm{N/m^2}$$

Provlačni otpor na temperaturi θ_0=20 °C je:

$$R_p^{20\,^\circ\mathrm{C}} = \frac{\rho_e}{2} \cdot \sqrt{\frac{\pi H_{Ag}}{F}} = 3.14 \cdot 10^{-5} \Omega$$

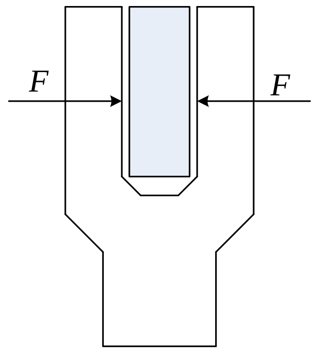
Slojni otpor je:

$$R_s = \sigma_s \frac{H_{Ag}}{F} = 4.33 \cdot 10^{-6} \Omega$$

Ukupni otpor na temperaturi θ_0=20 °C je:

$$R_k = R_p + R_s = 3,57 \cdot 10^{-5}\ \Omega$$

8. Odrediti otpor kontakata u obliku noža koji putem klizanja ulazi u kontaktnu čeljust u obliku ravnih ploča (nožasti kontakt). Površina kontakta je fino brušena. Kontakti su od bakra specifične otpornosti ρ=1,75·10^{-8} Ωm. Sila koja dejstvuje na kontakt je F=50 N.



Slika 8.1: *Nožasti kontakt*

Rešenje:

Provlačna komponenta otpora pločastih kontakata je:

$$R_k = \frac{R_1}{N} = \frac{\dfrac{\rho}{2}\sqrt{\dfrac{\pi H}{F}}}{C\,F^m} = \frac{a_2}{F^{(m+1)/2}}$$

gde su:

R_1 - provlačni otpor jedne tačke dodira

N - broj tačaka dodira koji je srazmeran sili: $N = C\,F^m$

ρ - specifična otpornost materijala

F - sila koja deluje na kontakt

Za praktičnu primenu se može koristiti Kesselring-ov obrazac:

$$R_K = k \cdot \frac{100\,\rho}{\left(\dfrac{F}{9,81}\right)^{\chi}}$$

gde su:

k - konstanta koja zavisi od materijala i vrste obrade $k = \begin{cases} 45, & \textit{fino brušen} \\ 110, & \textit{grubo četkan} \\ 150, & \textit{peskaren} \end{cases}$

χ - koeficijent koji zavisi od čistoće kontakata $\chi = \dfrac{2m+1}{2}, \chi = 0,7 \div 1, m = 0,2 \div 0,5$

U slučaju nožastog kontakta postoje dve kontaktne površine, pa je kontaktni otpor:

$$R_k' = \frac{R_k}{2}$$

Za fino brušen kontakt je k=45 i za prljave kontakte je χ=0,7, tako da se dobija:

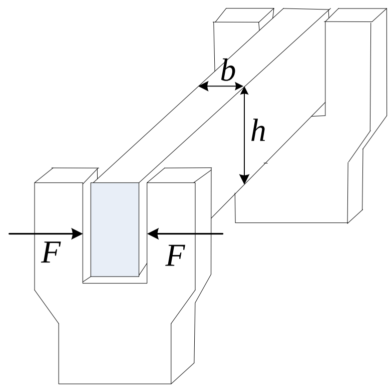
$$R_k' = \frac{2,52 \cdot 10^{-5}}{2} = 1,26 \cdot 10^{-5} \Omega$$

2. Zagrevanje kontakata

9. Bakarni nož rastavljača čiji je poprečni presek dimenzija b=5·10^{-3} m i h=8·10^{-2} m opterećen je konstantnom strujom I=1200 A. Toplotni kapacitet bakra je C_m=385 J/(kg °C). Gustina bakra je γ=8900 kg/m^2. Koeficijent odvođenja toplote sa površine noža je ξ=10 W/(m^2 °C). Temperatura ambijenta je θ_A=35 °C. Temperaturni koeficijent promene otpornosti je α=4.2·10^{-3} (°C)$^{-1}$. Specifična otpornost bakra na 0 °C iznosi ρ_0=1.62·10^{-8} Ωm.

a) Odrediti vremensku konstantu zagrevanja i maksimalnu temperaturu bakarnog noža rastavljača korišćenjem tačnih izraza i uprošćenih izraza u kojima se zanamaruje promena specifične otpornosti sa temperaturom ($\alpha \approx 0$).

b) Odredtiti posle kog vremena će se dostići 90% maksimalne temperature ako se provodnik na početku nalazio na temperaturi ambijenta.



Slika 10.1: *Rastavljač sa nožastim kontaktom*

Rešenje:

a) Površina poprečnog preseka noža rastavljača iznosi:

$$q = b \cdot h = 4 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^2$$

Površina hlađenja po jedinici dužine (obim) sabirnica iznosi:

$$s = 2b + 2h = 0,17\ \mathrm{m}$$

Gustina struje koja protiče kroz sabirnice iznosi:

$$\delta = \frac{I_i}{q} = 1,71 \cdot 10^6\ \mathrm{A/m}^2$$

Uticaji krajeva i kontakata na krajevima se mogu zanemariti, tako da se koristi obrazac za homogeni provodnik. Na osnovu uprošćenih formula dobijaju se sledeće vrednosti za vremensku konstantu i maksimalnu temperaturu noža rastavljača:

$$T = \frac{C_m \, \gamma \, q}{\xi \, s} = 806,23\,\text{s} = 13,44\,\text{min}$$

$$\theta_{pm} = \theta_\text{A} + \frac{\delta^2 \, \rho_0 \, q}{\xi \, s} = 69,31\,^\circ\text{C}$$

Za koeficijent skin efekta se usvaja $k_0 = 1$ pri frekvenciji od 50Hz. Korišćenjem tačnih formula vrednosti za vremensku konstantu i maksimalnu temperaturu noža rastavljača su:

$$T = \frac{C_m \, \gamma \, q}{\xi \, s - \delta^2 \, \rho_0 \, q \, k_0 \, \alpha} = 941,96\,\text{s} = 15,7\,\text{min}$$

$$\theta_{pm} = \frac{\xi \, s \, \theta_\text{A} + k_0 \, \rho_0 \, q \, \delta^2}{\xi \, s - k_0 \, \rho_0 \, \alpha \, q \, \delta^2} = 80,97\,^\circ\text{C}$$

Relativne greške pri proračunu korišćenjem uprošćenih formula u odnosu na tačne formule su:

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{941,96 - 806,23}{941,26} = 14,41\%$$

$$\frac{\Delta \theta_\text{max}}{\theta_\text{max}} = \frac{80,97 - 69,31}{80,97} = 14,41\%$$

b) Izraz za temperaturu je:

$$\theta = \theta_\text{max} - (\theta_\text{max} - \theta_\text{A}) \cdot e^{-\frac{t}{T}}$$

Pošto je početna temperatura provodnika jednaka temperaturi ambijenta, sledi:

$$0,9 \cdot \theta_\text{max} = \theta_\text{max} - (\theta_\text{max} - \theta_\text{A}) \cdot e^{-\frac{t}{T}}$$

Vreme za koje se dostiže 90% maksimalne temperature noža rastavljača je:

$$t = T - \ln \frac{0,1 \cdot \theta_\text{max}}{\theta_\text{max} - \theta_\text{A}} = 1636\,\text{s} = 27,27\,\text{min} = 1,74 \cdot T$$

10. Rastavljač iz prethodnog zadatka opterećen je intermitentnom kostantnom strujom I_i=1500 A. Interval opterećenja iznosi t_r=2 min, a pauza bez struje iznosi t_0=4 min.

a) Odrediti preopteretljivost i ekvivalentnu trajnu struju za ovaj režim.

b) Ako je maksimalno dozvoljena temperatura noža θ_max=80 ^{0}C proveriti da li rastavljač može da bude trajno opterećen na ovaj način (da li se pregreva).

Rešenje:

a) Pri intermitentnom opterećenju provodnika strujom I_i intervali opterećenja t_r i pauze bez struje t_0 se pravilno smenjuju tako da se dostiže niža nadtemperatura $\Delta\theta_1$ u odnosu na stacionarnu nadtemperaturu $\Delta\theta_{pm}$ koja bi se dostigla u trajnom pogonu pri istoj struji I_i. S obzirom da je stacionarno zagrevanje provodnika srazmerno kvadratu struje (gustine struje)

$$\Delta\theta_\text{max} = \theta_\text{max} - \theta_\text{A} = \frac{\rho_0 \, q \, \delta^2}{\xi \, s}$$

može se uvesti ekvivalentna trajna struja I_{et} kojom treba opteretiti provodnik da bi se u trajnom pogonu zagrejao do iste granice $\Delta\theta_1$. Preopteretljivost χ pokazuje koliko se puta provodnik može više opteretiti u intermitentnom nego u trajnom pogonu:

$$\chi = \frac{\Delta\theta_{pm}}{\Delta\theta_1} = \frac{I_i^2}{I_{et}^2}$$

Pri intermitentnom opterećenju temperatura provodnika u ustaljenom stanju osciluje između $\Delta\theta_1$ i $\Delta\theta_2$. U intevalu opterećenja dostiže se nadtemperatura $\Delta\theta_1$ prema jednačini zagrevanja provodnika:

$$\Delta\theta_1 = \Delta\theta_{pm} - (\Delta\theta_{pm} - \Delta\theta_2)\cdot e^{-\frac{t_r}{T}}$$

U pauzi bez struje provodnik se hladi do nadtemperature $\Delta\theta_2$ prema jednačini hlađenja provodnika:

$$\Delta\theta_2 = \Delta\theta_1 \cdot e^{-\frac{t_0}{T}}$$

Iz prethodne dve jednačine se dobija:

$$\Delta\theta_1 = \Delta\theta_{pm}\cdot(1-e^{-\frac{t_r}{T}}) + \Delta\theta_1\cdot e^{-\frac{t_0}{T}}\cdot e^{-\frac{t_r}{T}}$$

Preopteretljivost χ je:

$$\chi = \frac{\Delta\theta_{Pm}}{\Delta\theta_1} = \frac{1-e^{-\frac{t_0}{T}}\cdot e^{-\frac{t_r}{T}}}{1-e^{-\frac{t_r}{T}}}$$

U prethodnim izrazima se pretpostavlja da je vremenska konstanta hlađenja jednaka konstanti zagrevanja T koja se određuje iz opšteg obrazca kada bi provodnik bio trajno opterećen strujom od 1500A:

$$T = \frac{C_m\,\gamma\,q}{\xi\,s - k_0\,\rho_0\,\alpha\,q\,\delta^2} = 1040,48\,\text{s} = 17,34\,\text{min}$$

gde je gustina struje:

$$\delta = \frac{I_i}{q} = 3,75\cdot 10^6\ \text{A/m}^2$$

Preopteretljivost χ i ekvivalentna trajna struja I_{et} su:

$$\chi = \frac{\Delta\theta_{pm}}{\Delta\theta_1} = \frac{1-e^{-\frac{6}{17,34}}}{1-e^{-\frac{2}{17,34}}} = 2,685$$

$$I_{et} = \sqrt{\frac{I_i^2}{\chi}} = 915,4\,\text{A}$$

b) Maksimalna temperatura koja bi se postigla pri trajnom opterećenju strujom od 1500A:

$$\theta_{pm} = \frac{\xi\,s\,\theta_A + k_0\,\rho_0\,q\,\delta^2}{\xi\,s - k_0\,\rho_0\,\alpha\,q\,\delta^2} = 114,35\ ^\circ\text{C}$$

Maksimalna nadtemperatura iznosi:

$$\Delta\theta_{pm} = \theta_{pm} - \theta_A = 79,35\ ^\circ\text{C}$$

Pošto je za trajnu radnu struju 1500A određena preopteretljivost, nadtemperatura koja se dostiže pri intermitentnom pogonu je:

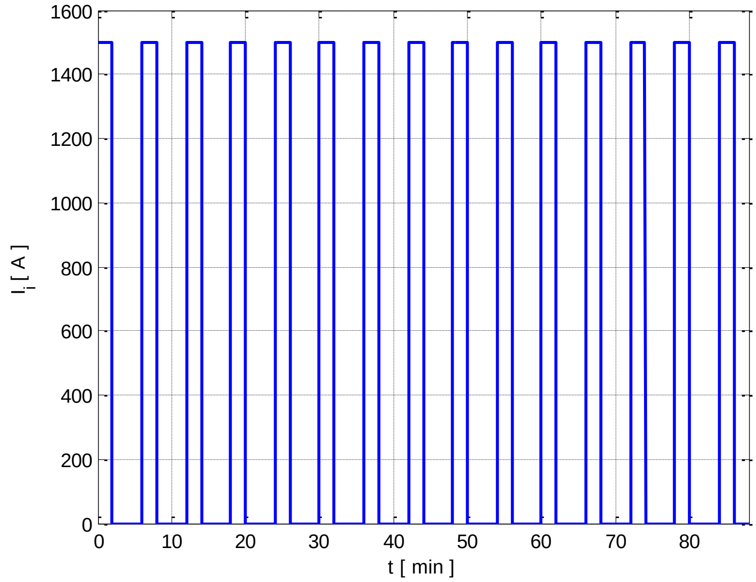
$$\Delta\theta_1 = \frac{\Delta\theta_{pm}}{\chi} = 29,55\,^{\circ}\mathrm{C}$$

Maksimalna nadtemperatura provodnika $\Delta\theta_1$ koja se dostiže pri intermitentnom pogonu je:

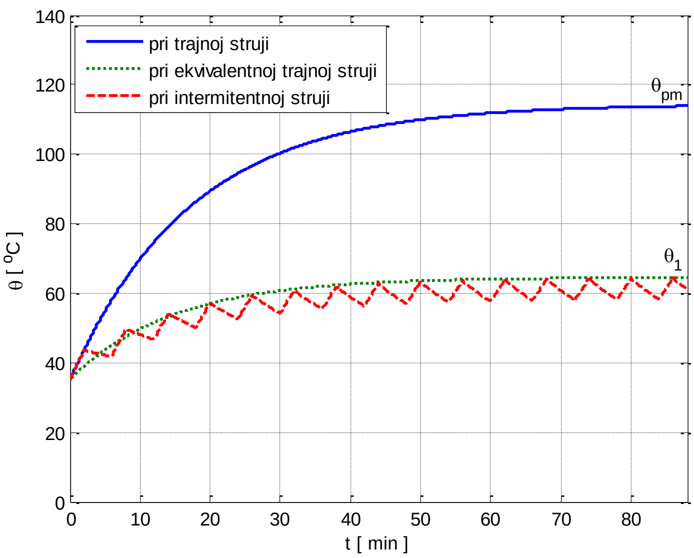
$$\theta_1 = \Delta\theta_1 + \theta_0 = 64,55\,^{\circ}\mathrm{C} < \theta_{\max} = 80\,^{\circ}\mathrm{C}$$

što znači da se rastavljač ne pregreva pri intermitentnom opterećenju strujom I_i=1500A.

Na slici 13.1 je prikazana struja pri intermitentnom pogonu rastavljača. Na slici 13.2 je prikazana temperatura noža rastavljača pri trajnoj struji od 1500 A, pri ekvivalentnoj trajnoj struji od 915,4 A i pri intermitentnoj struji od 1500 A.



Slika: *Struja pri intermitentnom pogonu rastavljača*



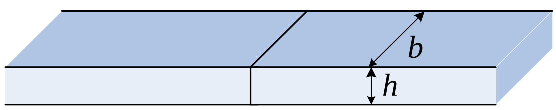
Slika: *Temperatura noža rastavljača pri trajnoj struji, pri ekvivalentnoj trajnoj struji i pri intermitentnoj struji*

11. Kontakt je ostvaren čeonim spojem dve bakarne šine čija je površina poprečnog preseka q=($5\cdot10^{-2}\times1\cdot10^{-2}$) m^2, koje su pritisnute silom F=300 N. Kroz kontakt protiče struja I=1 kA. Šine se nalaze u vazduhu čija je temperatura θ_A=35 °C. Dati su sledeći podaci:

- koeficijent odvođenja toplote sa površine šina $\xi = 10\ \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\ ^oC}}$
- temperaturni koeficijent promene otpornosti $\alpha = 4,2\cdot10^{-3}\ \dfrac{1}{^\mathrm{o}\mathrm{C}}$
- specifična otpornost bakra $\rho_0 = 1,62\cdot10^{-8}\ \Omega\mathrm{m}$ pri temperaturi 0 °C
- koeficijent toplotne provodnosti $\lambda = 390\ \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\ ^oC}}$

a) Odrediti temperaturu i otpor kontakta

b) Odrediti temperaturu šina na rastojanju x=10 cm od kontakta



Slika 16.1: *Čeoni spoj provodnika*

Rešenje:

a) Temperatura kontakata θ_m je:

$$\theta_m = \theta_{pm} + \theta_{km}$$

gde su:

θ_{pm} - maksimalna temperatura homogenog provodnika (kada ne bi bilo kontakta) u stacionarnom stanju,

θ_{km} - porast temperature (nadtemperatura) kontakta usled gubitaka u kontaktnom otporu.

Gustina struje u šinama je:

$$\delta = \frac{I}{q} = 2\cdot10^6\ \mathrm{A/m^2}$$

Površina hlađenja šina po jedinici dužine (obim) šina je:

$$s = 2b + 2h = 0,12\,\mathrm{m}$$

Maksimalna temperatura homogenog provodnika u stacionarnom stanju je

$$\theta_{pm} = \frac{\xi\, s\, \theta_\mathrm{A} + \delta^2 \rho_0\, q}{\xi\, s - k_0\, \rho_0\, \alpha\, q\, \delta^2} = 69,93\,^\mathrm{o}\mathrm{C}$$

Porast temperature kontakta usled gubitaka u kontaktnom otporu je:

$$\theta_{km} = \frac{I^2 R_k}{2\sqrt{\xi\, s\, q\, \lambda}}$$

gde se R_k otpor kontakta koji se izračunava na osnovu Kesselring-ovog obrasca.

Specifična otpornost na temperaturi $\theta_m = \theta_{pm} + \theta_{km}$ je:

$$\rho = \rho_0\left(1 + \alpha\,(\theta_{pm} + \theta_{km})\right)$$

tako da je:

$$R_k = k\frac{100\,\rho_0\left(1+\alpha\,(\theta_{pm}+\theta_{km})\right)}{\left(\dfrac{F}{9,81}\right)^{\chi}}$$

odnosno:

$$\theta_{km} = \frac{I^2}{2\sqrt{\xi\, s\,\lambda\, q}}\cdot k\cdot\frac{100\,\rho_0\left(1+\alpha\,(\theta_{pm}+\theta_{km})\right)}{\left(\dfrac{F}{9,81}\right)^{\chi}}$$

Rešavanjem prethodne jednačine dobija se priraštaj temperatura kontakta usled gubitaka u kontaktnom otporu:

$$\theta_{km} = \frac{\dfrac{I^2}{2\sqrt{\xi\, s\,\lambda\, q}}\cdot k\cdot\dfrac{100\,\rho_0(1+\alpha\theta_{pm})}{\left(\dfrac{F}{9,81}\right)^{\chi}}}{1-\dfrac{I^2}{2\sqrt{\xi\, s\,\lambda\, q}}\cdot k\cdot\dfrac{100\,\rho_0\,\alpha}{\left(\dfrac{F}{9,81}\right)^{\chi}}} = 9{,}16\ ^{\circ}\mathrm{C}$$

Temperatura kontakta je:

$$\theta_m = \theta_{pm}+\theta_{k\max} = 79{,}09\ ^{\circ}\mathrm{C}$$

Otpor kontakta je:

$$R_k = k\frac{100\,\rho_0\left(1+\alpha\,(\theta_{pm}+\theta_{km})\right)}{\left(\dfrac{F}{9,81}\right)^{\chi}} = 8{,}86\cdot 10^{-6}\ \Omega$$

Zbog malog otpora kontakta, nadteperatura θ_{km} je mala u odnosu na nadteperaturu θ_{pm} tako da se otpor kontakta može izračunati sa temperaturom θ_{pm}=69.93 °C:

$$R_k = k\frac{100\,\rho_0\left(1+\alpha\,\theta_{pm}\right)}{\left(\dfrac{F}{9,81}\right)^{\chi}}$$

tako da je porast temperature kontakta usled gubitaka u kontaktnom otporu:

$$\theta_{km} = \frac{I^2}{2\sqrt{\xi\, s\,\lambda\, q}}\cdot k\cdot\frac{100\,\rho_0(1+\alpha\theta_{pm})}{\left(\dfrac{F}{9,81}\right)^{\chi}} = 8{,}89\ ^{\circ}\mathrm{C}$$

Temperatura kontakta kada se zanemari porast otpornosti kontakta zbog zagrevanja usled gubitaka u kontaktnom otporu je:

$$\theta_m = \theta_{pm}+\theta_{km} = 78{,}82\ ^{\circ}\mathrm{C}$$

b) Temperatura šina θ na rastojanju x od mesta kontakta je:

$$\theta = \theta_{pm}+\theta_k$$

gde su:

θ_{pm} - maksimalna temperatura homogenog provodnika (kada ne bi bilo kontakta) u stacionarnom stanju

θ_k - porast temperature na rastojanju x od mesta kontakta usled gubitaka u kontaktnom otporu

Porast temperature usled otpora kontakta za obe šine ekponencijalno opada sa rastojanjem x od mesta kontakta:

$$\theta = \theta_{km}\, e^{-ax}$$

gde veličina a ima vrednost:

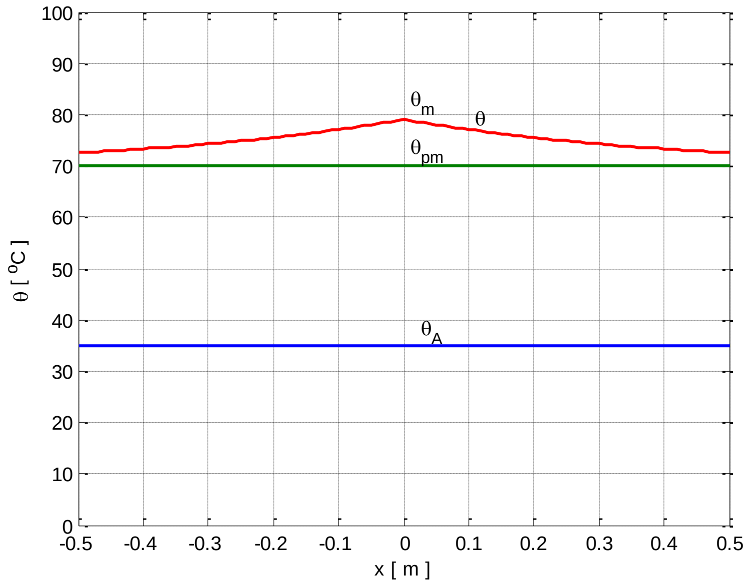
$$a = \sqrt{\frac{\xi\, s}{\lambda\, q}} = 2.481 \frac{1}{\mathrm{m}}$$

Porast temperature šina na rastojanju x=10 cm od mesta kontakta usled gubitaka u kontaktnom otporu je:

$$\theta = \theta_{km}\, e^{-ax} = 7{,}15\,^{\circ}\mathrm{C}$$

Temperatura šina na rastojanju x=10 cm od mesta kontakta je:

$$\theta = \theta_{pm} + \theta_k = 77{,}08\,^{\circ}\mathrm{C}$$



Slika: *Raspodela temperature duž šina pri čeonom kontaktu šina*

12. Odrediti maksimalnu temperaturu koju dostiže provodnik od bakra pri kratkom spoju ako se on isključuje posle t_k=1 s. Smatrati da struja kratkog spoja ima konstantnu efektivnu vrednost I=12 kA. Radna temperatura provodnika je jednaka maksimalnoj vrednosti temperature homogenog provodnika u stacionarnom stanju, $\theta_{stac}=\theta_{pm}$=70 °C. Poprečni presek provodnika je $q=(4\cdot10^{-2}\times1\cdot10^{-2})$ m^2. Dati su sledeći podaci:

- specifična otpornost bakra $\rho_0 = 1{,}62\cdot10^{-8}\,\Omega\mathrm{m}$ pri temperaturi 0 °C

- specifična toplota bakra $c_m = 385\,\dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\,^{\circ}\mathrm{C}}$

- gustina bakra $\gamma = 8{,}9\cdot10^{3}\,m$

- temperaturni koeficijent promene otpornosti $\alpha = 4,2 \cdot 10^{-3}\ \frac{1}{^{\mathrm{o}}\mathrm{C}}$

- koeficijent povećanja otpora usled skin efekta $k_0 = 1$

Posle kog vremena bi se postigla ista temperatura u slučaju da efektivna vrednost struje kratkog spoja iznosi 20 kA?

Rešenje:

Opšta jednačina zagrevanja je:

$$\lambda\, q \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \xi\, S\left(\theta - \theta_{\mathrm{A}}\right) + k_0\, \rho_0 \left(1 + \alpha\, \theta\right) \frac{1}{q} I^2 = C_m\, \gamma\, q \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

Za naprezanje aparata u slučaju kratkog spoja bitno je naglo zagrevanje njegovih strujnih krugova. S obzirom na vrlo kratko trajanje tih pojava može se zanemariti prelazak toplote na okolinu, ξ=0. S druge strane posmatra se homogen dug provodnik pa je $\theta \neq f(x)$, odnosno $\partial\theta/\partial x$=0. Za slučaj kratkog spoja jednačina zagrevanja homogenog provodnika postaje:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{I^2}{q^2} \cdot \frac{k_0\ \rho_0\ (1 + \alpha\, \theta)}{C_m\ \gamma}$$

Ako se zanemari promena otpora sa temperaturom $\alpha\theta \approx 0$ dobija se sledeća diferencijalna jednačina:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \delta^2 \cdot \frac{k_0\ \rho_0}{c_m\ \gamma}$$

čije je rešenje sledeća linearna funkcija temperature od vremena:

$$\theta = \delta^2 \cdot \frac{k_0\, \rho_0}{c_m\, \gamma} \cdot t + \theta_{stac}$$

Prema prethodnom izrazu temperatura provodnika za vreme trajanja kratkog spoja linearno raste počevši od stacionarne radne temperature.

Gustina struje pri kratkom spoju je:

$$\delta = \frac{I}{q} = 3 \cdot 10^7\ \mathrm{A/m^2}$$

Maksimalna temperatura provodnika θ_{ks} se dostiže u trenutku isključenja struje kratkog spoja t_k:

$$\theta_{ks} = \delta^2 \cdot \frac{k_0\, \rho_0}{c_m\, \gamma} \cdot t_{ks} + \theta_{stac} = 74,255\ ^{\mathrm{o}}\mathrm{C}$$

Ako se uračunava promena otpora sa temperaturom, diferencijalna jednačina koja opisuje zagrevanje provodnika za vreme trajanja kratkog spoja je:

$$\frac{d\theta}{1 + \alpha\theta} = \delta^2 \cdot \frac{k_0\, \rho_0}{c_m\, \gamma} \cdot dt$$

Maksimalna temperatura provodnika θ_{ks} se određuje kao temperatura provodnika u trenutku isključenja struje kratkog spoja t_k, tako da je:

$$\int_{\theta_{stac}}^{\theta_{ks}} \frac{d\theta}{1 + \alpha\theta} = \frac{k_0\, \rho_0}{c_m\, \gamma} \int_0^{t_{ks}} \delta^2 dt$$

U ovom slučaju je δ=const jer je efektivna vrednost struje kratkog spoja konstantna, tako da je

$$\int_0^{t_{ks}} \delta^2 dt = \delta^2\, t_{ks}$$

Maksimalna temperatura provodnika θ_{ks} pri kratkom spoju je:

$$\theta_{ks} = \frac{1}{\alpha}\left(\left(1+\alpha\,\theta_{stac}\right)e^{\alpha\frac{k_0\,\rho_0}{c_m\,\gamma}\delta^2\,t_{ks}} -1\right) = 74,255\,^{\mathrm{o}}\mathrm{C}$$

Razlika u odnosu na slučaj kada se zanemaruje promena otpora sa temperaturom ($\alpha\theta\approx 0$) je mala.

Ako je struja kratkog spoja I=20 kA gustina struje je:

$$\delta = \frac{I}{q} = 5\cdot 10^7 \text{ A/m}^2$$

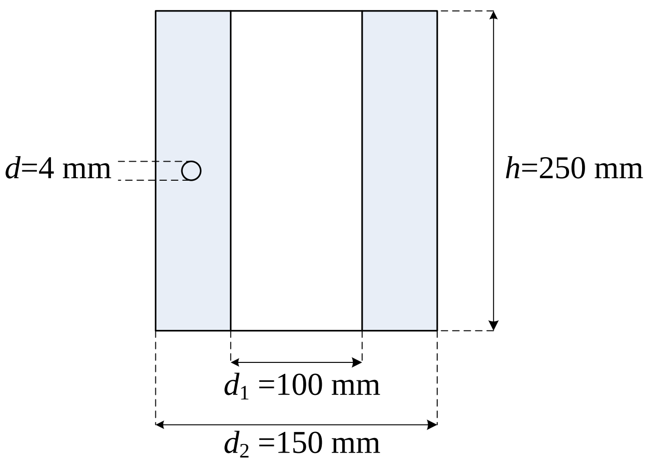
Iz jednačine zagrevanja provodnika za vreme trajanja kratkog spoja

$$\theta = \frac{1}{\alpha}\left(\left(1+\alpha\,\theta_{stac}\right)e^{\alpha\frac{k_0\,\rho_0}{c_m\,\gamma}\delta^2\,t} -1\right)$$

dobija se vreme posle koga bi se postigla temperatura $\theta=\theta_{ks}$=74,225 °C pri struji kratkog spoja I=20 kA:

$$t = \frac{c_m\,\gamma}{\alpha\,k_0\,\rho_0\,\delta^2}\ln\frac{1+\alpha\,\theta_{ks}}{1+\alpha\,\theta_{stac}} = 0,36\,\mathrm{s}$$

13. Odrediti maksimalnu gustinu prostoperiodične struje cilindričnog kalema sa N=250 zavojaka izvedenog od bakarne žice prečnika d=4 mm. Dimenzije kalema su date na slici a maksimalno dozvoljena temperatura je θ_{max}=90 °C. Temperatura ambijenta je θ_A=35 °C, specifična otpornost bakra na 0 °C je $\rho_0=1,62\cdot 10^{-8}$ Ωm, koeficijent odvođenja toplote sa površine kalema je ξ=10 W/(m^2 °C) a temperaturni koeficijent promene otpornosti je $\alpha=4,2\cdot 10^{-3}$ (°C)$^{-1}$.



Rešenje:

Opšta jednačina zagrevanja provodnika je:

$$\lambda q \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \xi s\left(\theta - \theta_{\mathrm{A}}\right) + k_0 \rho_0 \left(1 + \alpha \theta\right) \frac{1}{q} I^2 = C_m \gamma q \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

Ako se posmatra stacionarno stanje ($\partial\theta/\partial t = 0$) i homogen provodnik ($\partial\theta/\partial x = 0$) jednačina zagrevanja se svodi na:

$$\xi s\left(\theta - \theta_{\mathrm{A}}\right) = k_0 \rho_0 \left(1 + \alpha \theta\right) \frac{1}{q} I^2$$

što znači da se sva toplota koja se oslobodi usled Džulovih gubitaka odvodi hlađenjem. U slučaju kalema koji je izveden od bakarne žice prečnika d, snaga Džulovih gubitaka u kalemu je:

$$P_J = RI^2 = \rho_0 \left(1 + \alpha \theta\right) \frac{N\, l_{sr}}{\pi \frac{d^2}{4}} I^2$$

gde su:

R - otpornost kalema,

d – prečnik žiče od koje je izveden kalem,

N – broj zavojaka kalema,

l_{sr} – srednja dužina jednog zavojka, $l_{sr} = \pi \frac{d_1 + d_2}{2} = 0,4\,\mathrm{m}$ .0,3925m

Snaga kojom se odvodi toplota sa površine kalema je:

$$P_h = \xi S\left(\theta - \theta_{\mathrm{A}}\right)$$

gde je S površina kalema sa koje se odvodi toplota u okolni prostor (obuhvata gornju i donju osnovu kalema i spoljašnji i unatrašnji omotač):

$$S = 2\pi\left(\frac{d_2^2}{4} - \frac{d_1^2}{4}\right) + \pi\,(d_1 + d_2)\,h = 0,222\,\mathrm{m}^2$$

Otpornost kalema pri maksimalno dozvoljenoj temperaturi $\theta_{\max}$ je:

$$R = \rho_0 \left(1 + \alpha \theta_{\max}\right) \frac{N\, l_{sr}}{\pi \frac{d^2}{4}} = 0.1779\,\Omega \; 0,17773$$

Snaga kojom se odvodi toplota sa površine kalema pri maksimalnoj dozvoljenoj temperaturi $\theta_{\max}$ je:

$$P_h = \xi S\left(\theta_{\max} - \theta_{\mathrm{A}}\right) = 122\,\mathrm{W} \; 122,1$$

Maksimalno dozvoljena struja se dobija iz uslova $P_J = RI_{\max}^2 = P_h$ i iznosi:

$$I_{\max} = \sqrt{\frac{P_h}{R}} = 26.22\,\mathrm{A} \; 26,19$$

Maksimalno dozvoljena gustina struje je:

$$\delta_{\max} = \frac{I_{\max}}{\pi \frac{d^2}{4}} = 2.09 \cdot 10^6 \, \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}$$